RAIRO
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE
ET ANALYSE NUMÉRIQUE

ANTOINE HENROT
MICHEL PIERRE

Un problème inverse en formage des métaux liquides

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, nº 1 (1989), p. 155-177.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_1_155_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE
(Vol. 23, n° 1, 1989, p. 155 à 177)

UN PROBLÈME INVERSE EN FORMAGE DES MÉTAUX LIQUIDES (*)

par Antoine HENROT [1] et Michel PIERRE [1]

Communiqué par P. L. LIONS

Résumé. — *Le problème suivant est étudié : un jet de métal liquide tombe sous l'action de la gravité dans un champ magnétique. Quel champ faut-il alors créer pour que la section horizontale du jet prenne une forme prédéfinie ? Dans le cadre de la modélisation adoptée, nous montrons qu'il est, en général, nécessaire que le contour donné de la section soit une courbe analytique. Dans ce cas, le champ est alors entièrement déterminé au voisinage de la courbe. Un procédé constructif est indiqué et les possibilités d'extension globale du champ sont examinées.*

Summary. — *A vertically falling liquid column may be shaped by an externally applied magnetic field. The question examined here is the possibility of determining the field in order that the horizontal section of the liquid have a prescribed shape. According to the chosen model, we prove here that the boundary of the section must, in general, be an analytic curve. Then the magnetic field is completely determined in a neighborhood of the curve. A constructive process is indicated and possibilities of global extension are considered.*

I. INTRODUCTION

Nous étudions un problème provenant de la modélisation du formage de métaux liquides par électromagnétisme. Le modèle étudié correspond au cas d'un jet de métal liquide s'écoulant sous l'action de la gravité dans un champ électromagnétique. La section du jet se déforme sous l'action du champ ; la forme obtenue dépend bien sûr de la géométrie des inducteurs et de l'intensité du champ.

Nous nous intéressons ici au problème inverse : quel champ faut-il créer pour que le jet prenne une section de forme prédéfinie ? Cette question est

(*) Reçu en septembre 1987.

[1] Département de Mathématiques, U.A. CNRS 750, B.P. 239, Université de Nancy I, 54506 Vandœuvre lès Nancy.

d'un intérêt évident pour la systématisation de procédés de formage de métaux : la fusion du métal, son écoulement dans un champ électromagnétique adéquat et son refroidissement brutal permettent ainsi d'obtenir un produit de forme voulue. Pour la mise en œuvre pratique, il est essentiel que le champ à créer soit facilement réalisable : un exemple typique est celui où le champ est réalisé par des conducteurs verticaux répartis convenablement autour du jet.

La modélisation : En première approximation, nous pouvons nous limiter à un modèle bidimensionnel : la section étudiée du liquide est supposée occuper un domaine borné Ω_i de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. Le champ magnétique de valeur efficace $\vec{B}_0$ est appliqué dans l'extérieur Ω de Ω_i avec

$$\text{rot } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \,, \tag{1.1}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et $\vec{j}_0$ le vecteur densité de courant efficace. On supposera $\vec{j}_0$ vertical et ne dépendant que des variables (x, y), soit

$$\vec{j}_0(x, y) = (0, 0, j_0(x, y)) \,. \tag{1.2}$$

Le cas de conducteurs filiformes correspond à celui où j_0 est une somme de masses de Dirac.

Nous suivons maintenant la modélisation proposée dans [2], [3], [8] : nous nous plaçons en particulier dans le cas où la pulsation du champ imposé est suffisamment grande pour qu'on puisse considérer que le champ ne pénètre pas à l'intérieur du métal. On néglige donc les « effets de peau » : l'épaisseur de la « peau électromagnétique » est supposée nulle. Ainsi, l'équilibre du système est assuré par l'équilibre statique à la surface du métal entre les forces de tension superficielle et les forces électromagnétiques.

Si $\vec{B}_1$ est le champ propre créé par les courants superficiels induits, le champ total (horizontal) $\vec{B}$ est donné par

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \tag{1.3}$$

et satisfait à

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1.4}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1.5}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \,. \tag{1.6}$$

La condition d'équilibre à la frontière s'écrit

$$B^2/2\,\mu_0 + \sigma C = \text{constante} \tag{1.7}$$

où $B = \|\vec{B}\|$, norme euclidienne de $\vec{B}$, C est la courbure de Γ et σ la tension superficielle du fluide dans l'air.

Le problème « direct » consistant à déterminer la frontière libre Γ connaissant $\vec{B}_0$ (ou $\vec{j}_0$) et le volume du fluide (ou ici la surface) a été étudié dans certains cas particuliers soit par des calculs explicites (voir [1], [8]) soit de façon numérique (voir [2], [3], [5]).

Le problème inverse : On se donne la forme à imposer au liquide, c'est-à-dire un domaine borné Ω_i limité par une famille de courbes fermées Γ_j, $j = 1, \dots, p$. Il s'agit alors de trouver $\vec{j}_0$ et $\vec{B}$ satisfaisant au système d'équations (1.4)-(1.7) avec $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$ et Ω extérieur de $\bar{\Omega}_i$. L'objectif est surtout de construire j_0 avec la seule connaissance de Γ. De plus, il est intéressant de pouvoir réaliser j_0 de façon simple : peut-on par exemple prendre pour j_0 une somme de masses de Dirac ou tout au moins l'approcher raisonnablement par de telles distributions ?

Réinterprétation du problème inverse : En fait, nous remarquons que, dès que Γ est donnée, la direction du vecteur $\vec{B}$ est imposée sur Γ par la condition (1.6). De plus, son module est imposé sur Γ par la condition (1.7) tout au moins lorsqu'on se fixe la valeur de la constante. Ainsi $\vec{B}$ est entièrement déterminé au signe près sur Γ et le problème inverse consiste à le relever sur Ω en un champ de vecteurs satisfaisant à (1.4), (1.5). La condition (1.4) n'impose aucune restriction et ne sert qu'à calculer $\vec{j}_0$. Les conditions (1.5), (1.6) expriment que $\vec{B}$ est un champ de rotationnels.

Ainsi, la première question qui se pose est la suivante :

Problème $\mathscr{P}_0$: Étant donné un champ de vecteurs $\vec{b}$ sur Γ, peut-on le relever en un champ de rotationnels ?

Sous l'hypothèse $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$, il est classique qu'il y a une infinité de solutions (voir détails au paragraphe suivant). Cependant, au vu de l'origine du problème, il est naturel d'imposer de plus que la distribution de courant j_0 soit nulle au voisinage du volume $\bar{\Omega}_i$ occupé par le liquide. Nous sommes ainsi conduits au problème plus spécifique suivant :

Problème $\mathscr{P}_1$: Soit $\vec{b}$ un champ de vecteurs sur Γ. Existe-t-il une fonction ψ sur $\bar{\Omega}$ telle que :

(1.8) $\quad (\psi_y, -\psi_x) = \vec{b}$ sur Γ (i.e. $\vec{b}$ se relève en un rotationnel)

(1.9) $\quad \Delta\psi = 0$ sur $\Omega \cap o$ où o est un voisinage de Γ ?

Nous montrons qu'il y a unicité locale pour $\mathscr{P}_1$ (à une constante près). Ainsi le potentiel solution ψ est *entièrement déterminé* par le couple $(\Gamma, \vec{b})$ au voisinage de Γ. De plus, si $\vec{b}\,.\,\vec{n} = 0$ sur Γ comme dans (1.6), l'existence est assurée si et seulement si certaines conditions d'*analyticité* des données sont satisfaites.

Le problème $\mathscr{P}_1$ étant résolu, nous pouvons alors revenir au vrai problème de formage posé initialement.

Problème $\mathscr{P}_2$: La courbe Γ est de classe C^2 et le champ $\vec{b} = \vec{B}$ est maintenant défini par les conditions (1.6), (1.7) soit :

$$\vec{b}\,.\,\vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{1.10}$$

$$\|\vec{b}\|^2/2\,\mu_0 + \sigma C = P \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{1.11}$$

où P est une constante, a priori inconnue du problème. Une condition nécessaire sur cette constante est bien sûr que

$$P \geqslant \sigma \max_{\Gamma} C\,. \tag{1.12}$$

Si cette condition est satisfaite, le champ $\vec{B}$ cherché est, au signe près, entièrement déterminé sur Γ et il s'agit donc de trouver ψ satisfaisant à (1.8), (1.9) où $\vec{b}$ est donné sur Γ vérifiant (1.10), (1.11).

A l'aide des résultats pour $\mathscr{P}_1$, on montre que, P étant donnée satisfaisant à (1.12), le problème admet une solution si et seulement si la *courbe* Γ *est analytique* et, dans le cas où $P = \sigma \max_{\Gamma} C$, si de plus, C atteint son maximum en un nombre *pair* de points (multiplicité comprise). Les deux cas sont physiquement différents : par exemple, si on veut former Γ avec une distribution de charges de masse totale nulle sur Ω, soit $\int_{\Omega} j_0 = 0$, il est nécessaire que $P = \sigma \max_{\Gamma} C$ et donc que le nombre de maxima de C sur Γ soit pair. Les courbes n'ayant pas cette propriété devront donc être formées à l'aide de « courants à l'infini » ou de courants globalement non nuls dans Ω_i.

Il est à noter que l'existence de ψ (et donc de j_0) est établie de façon complètement *constructive*. Elle est déterminée de façon unique au voisinage de Γ, mais une certaine liberté subsiste sur la façon de l'étendre à Ω tout entier qui peut être mise à profit pour faciliter sa réalisation concrète. Des structures possibles de j_0 sont étudiées au paragraphe V pour le cas significatif d'une seule courbe fermée $\Gamma = \Gamma_1$ et des exemples explicites sont traités au paragraphe VI.

Signalons enfin que la nécessité de l'analyticité de Γ repose sur des résultats de régularité analytique pour les solutions d'équations elliptiques à conditions non linéaires analytiques au bord.

Ce problème nous a été proposé par J. P. Brancher. Nous l'en remercions ainsi que de l'aide qu'il nous a apportée par sa bonne connaissance physique du problème, en particulier pour l'interprétation des résultats. Nous remercions A. Grigis pour les références qu'il nous a indiquées sur les questions de régularité analytique.

II. LE PROBLÈME $\mathscr{P}_0$

Dans toute la suite, nous ferons au minimum l'hypothèse suivante sur la géométrie du domaine Ω_i occupé par le liquide :

$$(2.0)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_i \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^2 \text{ dont la frontière } \Gamma \text{ est la réunion} \\ \text{disjointe d'un nombre fini de « courbes » fermées } \Gamma_j,\ j = 1, \dots, p, \\ \text{de classe } C^1, \text{ et } \Omega_i \text{ est localement « d'un seul côté » de } \Gamma_j, \end{array}\right.$$

soit de façon plus précise : on désigne par Ω le complémentaire de $\bar{\Omega}_i$. Les courbes Γ_j seront représentées comme images du cercle-unité de la façon suivante : on désigne par Γ_0 le cercle-unité et

$$W_\varepsilon = \left\{(\xi, \eta)\,;\, 1 - \varepsilon < \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1 + \varepsilon\right\},$$
$$V_\varepsilon = \left\{(\xi, \eta)\,;\, 1 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1 + \varepsilon\right\},$$

où ε est choisi assez petit pour que

$$(2.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour } j = 1, \dots, p, \text{ il existe un difféomorphisme } \phi_j \text{ de classe} \\ C^1 \text{ de } W_\varepsilon \text{ sur un voisinage } V_j \text{ de } \Gamma_j \text{ tel que} \\ \bullet\ \phi_j(\Gamma_0) = \Gamma_j \\ \bullet\ \phi_j(W_\varepsilon \backslash V_\varepsilon) \cap \Omega = \varnothing \\ \bullet\ U_j = \phi_j(V_\varepsilon) \subset \bar{\Omega} \\ \bullet\ \bar{U}_j \cap \bar{U}_l = \varnothing \quad \text{si} \quad j \neq l\,. \end{array}\right.$$

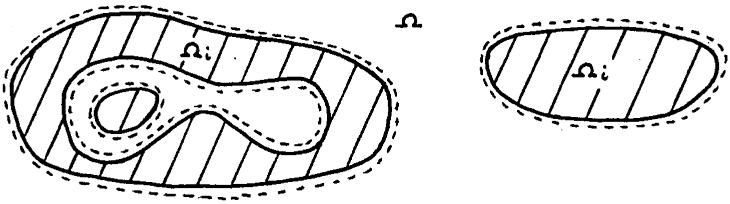


Figure 1.

Nous considérons alors la question préliminaire suivante :

Problème $\mathscr{P}_0$: Soit $\vec{b}$ un champ de vecteurs continu sur Γ. Existe-t-il $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tel que :

$$\vec{b} = (\psi_y, -\psi_x) \quad \text{sur} \quad \Gamma\ ? \tag{2.2}$$

PROPOSITION 2.1 : *Le problème* $\mathscr{P}_0$ *a une solution si et seulement si*

$$\forall j = 1, \ldots, p \quad \int_{\Gamma_j} \vec{b} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0 \tag{2.3}$$

où $\vec{n}$ *est la normale à* Γ_j *dirigée vers* Ω *et* $d\sigma$ *la mesure linéaire sur* Γ_j.

Démonstration : Bien que ceci soit classique, nous en donnons une preuve afin de fixer les notations pour la suite.

Condition nécessaire : Supposons l'existence de ψ satisfaisant à (2.2). Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $\theta_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ égale à 1 sur un voisinage de Γ_j et à support inclus dans le voisinage V_j défini en (2.1). Alors, la fonction $f = \theta_j\, \psi$ définie sur $\bar{\Omega}$ est à support dans $\bar{U}_j$ et safisfait à

$$\vec{b} = (f_y, -f_x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_j\,. \tag{2.4}$$

Intégrant par parties la relation

$$0 = \int_{U_j} (f_{yx} - f_{xy})\, dx\, dy \tag{2.5}$$

nous obtenons

$$0 = \int_{\Gamma_j} f_y \cdot n_1 - f_x \cdot n_2 \quad \text{où} \quad \vec{n} = (n_1, n_2)\,, \tag{2.6}$$

ce qui est (2.3) d'après la remarque (2.4). Notons que si l'écriture de (2.5) nécessite a priori f plus régulière, la relation (2.6) reste valable par argument de densité pour tout $f \in C^1(\bar{\Omega})$.

Condition suffisante : L'argument ci-dessus montre qu'en fait le problème $\mathscr{P}_0$ est « local » ; de plus il suffit de le résoudre pour $\Gamma = \Gamma_0$.

En effet, remarquons d'abord que la donnée de $\vec{b}$ sur Γ équivaut à la donnée de la forme différentielle sur Γ

$$\omega = -b^2(x, y)\, dx + b^1(x, y)\, dy \tag{2.7}$$

où on note $\vec{b} = (b^1, b^2)$. L'hypothèse (2.3) équivaut à

$$0 = \int_{\Gamma_j} \omega = \int_{\Gamma_0} \phi_j^* \, \omega \tag{2.8}$$

où $\phi_j^* \, \omega(\xi, \eta) = \omega(\phi_j(\xi, \eta)) \circ \phi_j'(\xi, \eta)$ est la forme différentielle sur Γ_0 transportée de ω par ϕ_j. On note de même

$$\phi_j^* \, \omega = - b_j^2(\xi, \eta) \, d\xi + b_j^1(\xi, \eta) \, d\eta$$

de telle sorte que si $\vec{b}_j = (b_j^1, b_j^2)$, on a aussi

$$0 = \int_{\Gamma_0} \vec{b}_j \, . \, \vec{n} \, d\sigma \tag{2.9}$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à Γ_0 orientée convenablement.

Supposons le problème résolu sur Γ_0, c'est-à-dire qu'il existe ψ_j de classe C^1 sur V_ε (voir (2.1)) telle que

$$\vec{b}_j = (\psi_{j\eta}, - \psi_{j\xi}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \, . \tag{2.10}$$

On a alors

$$\phi_j^* \, \omega = \psi_{j\xi} \, d\xi + \psi_{j\eta} \, d\varphi = d\psi_j \, ,$$

ceci s'étendant à V_ε. On pose maintenant

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \theta_j(x, y) \, \psi_j(\phi_j^{-1}(x, y))$$

où les θ_j sont définis comme dans la démonstration de la condition nécessaire. La fonction ψ ainsi construite est de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ et au voisinage de chaque Γ_j, on a

$$d\psi = d(\psi_j \circ \phi_j^{-1}) \, .$$

Puisque $d\psi_j = \phi_j^* \, \omega$, on a donc $\omega = d\psi$ sur Γ_j soit, d'après (2.7), $(\psi_x, \psi_y) = (- b^2, b^1)$, ce qui est la relation cherchée.

Reste à montrer qu'un champ de vecteurs continu $\vec{b}_j$ sur Γ_0 satisfaisant à (2.9) est de la forme (2.10). Ceci peut se faire d'une infinité de façons. Nous donnons une solution explicite. Notons :

$$\vec{b}_j = \alpha(\theta) \, \vec{n} + \beta(\theta) \, \vec{t}$$

où θ est l'angle polaire du point courant, $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\vec{t} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ et α, β des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 2π. La condition (2.9) exprime que

$$\int_0^{2\pi} \alpha(\theta)\, d\theta = 0 ,$$

ce qui assure que la fonction de classe C^1

$$A(\theta) = \int_0^{\theta} \alpha(\theta')\, d\theta'$$

est 2π-périodique. Pour $(r, \theta) \in [1, \infty[\times \mathbb{R}$ et $(\xi, \eta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on définit alors

$$\psi_j(\xi, \eta) = A(\theta) + \int_{\theta}^{\theta + r - 1} \beta(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} .$$

La fonction ψ_j est de classe C^1 sur l'ensemble $\{(\xi, \eta) ; \xi^2 + \eta^2 \geq 1\}$ et satisfait à (2.10) puisque

$$\begin{aligned} \psi_{j\xi} &= [\alpha(\theta) + \beta(\theta + r - 1) - \beta(\theta)](-\sin\theta)/r + \beta(\theta + r - 1)\cos\theta \\ \psi_{j\eta} &= [\alpha(\theta) + \beta(\theta + r - 1) - \beta(\theta)]\cos\theta/r + \beta(\theta + r - 1)\sin\theta . \end{aligned}$$

Remarque : *Relèvement de $\vec{b}$ en un champ de gradient* : On démontrerait de façon analogue que $\vec{b} = (\psi_x, \psi_y)$ sur Γ avec ψ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ si et seulement si

$$\forall j = 1, \dots, p \quad \int_{\Gamma_j} \vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent unitaire à Γ. La condition porte donc alors sur la composante tangentielle et non plus la composante normale de $\vec{b}$.

III. LE PROBLÈME $\mathscr{P}_1$

Nous passons maintenant au problème plus réaliste de la détermination d'une distribution de charge j_0 qui soit nulle au voisinage du domaine occupé par le liquide, ce qui, comme il est expliqué au paragraphe I, consiste en le problème suivant :

Problème $\mathscr{P}_1$: Soit $\vec{b}$ un champ de vecteurs continu sur Γ. Existe-t-il une fonction ψ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ telle que

(3.1) $$\vec{b} = (\psi_y, -\psi_x) \text{ sur } \Gamma$$

(3.2) $$\Delta\psi = 0 \text{ sur } \Omega \cap o \text{ où } o \text{ est un voisinage de } \Gamma \,?$$

Dans ce paragraphe, nous aurons besoin d'augmenter les hypothèses sur les paramétrages ϕ_j des courbes de Jordan Γ_j (voir (2.0), (2.1)). Nous ferons la convention que toute fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

est identifiée avec la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$z = x + iy \mapsto \phi(x, y) = \phi(z) = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y) .$$

Ainsi outre les hypothèses (2.0), (2.1), nous supposerons

$$(3.3) \quad \begin{cases} \phi_j \text{ est une fonction holomorphe sur l'intérieur de la couronne } V_\varepsilon, \\ \text{et } \phi_j \text{ est un difféomorphisme de classe } C^1 \text{ de } \bar{V}_\varepsilon \text{ sur } \bar{U}_j. \end{cases}$$

Remarque : L'hypothèse (3.3) implique bien sûr que $\phi_j'(z) \neq 0$ sur $\overset{\circ}{V}_\varepsilon$ et que $\phi_j'(z)$ se prolonge par continuité à Γ_0 avec aussi $\phi_j'(z) \neq 0$ pour $z \in \Gamma_0$. Cette hypothèse est naturelle pour des courbes de Jordan régulières (voir par exemple [7]).

THÉORÈME 3.1 : *(Unicité). Soit ψ, $\hat{\psi}$ deux solutions du problème $\mathcal{P}_1$. Alors, pour $j = 1, \dots, p$, $\psi - \hat{\psi}$ est constant sur un voisinage de Γ_j.*

Démonstration : Soit $v = \psi - \hat{\psi}$ où ψ, $\hat{\psi}$ sont solutions de $\mathcal{P}_1$ et

$$(3.4) \qquad \omega = \phi_j\{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 < |z| < 1 + \varepsilon, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$$

qui est un domaine simplement connexe. Sur ω, v est une fonction harmonique et est donc la partie réelle d'une fonction holomorphe f sur ω. D'après les relations de Cauchy

$$f'(z) = v_x - iv_y \quad \text{sur} \quad \omega .$$

Mais, d'après (3.1), $v_x = v_y = 0$ sur $\bar{\omega} \cap \Gamma_j$. Ainsi $f'(\phi_j(z))$ est une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 < |z| < 1 + \varepsilon, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$, continue sur $\{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 \leqslant |z| < 1 + \varepsilon, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$ et nulle sur $\{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$. Elle est donc identiquement nulle sur ω (de façon classique à l'aide du principe de symétrie de Schwarz). Le théorème 3.1 s'en déduit par recollement.

Remarque 1 : Au vu de la démonstration ci-dessus, la propriété $\psi - \hat{\psi} =$ constante sur Γ_j est en fait vérifiée dès que ψ et $\hat{\psi}$ satisfont à (3.2) et :

$$(\psi_y, -\psi_x) = (\hat{\psi}_y, -\hat{\psi}_x) \quad \text{sur un sous-arc de} \quad \Gamma_j .$$

En effet, il suffit d'appliquer le raisonnement ci-dessus à tout domaine simplement connexe ω inclus dans U_j et dont la frontière a une intersection avec Γ_j égale au sous-arc de coïncidence.

Nous en venons maintenant au problème d'existence. Nous nous limiterons à la situation réalisée en pratique où le champ de vecteurs $\vec{b}$ est tangent à Γ. Chaque courbe Γ_j est l'image de $\{\phi_j(e^{i\theta})\ ;\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Nous notons $\vec{\tau}_j$ le vecteur unitaire tangent à Γ_j orienté dans le sens de θ. Ainsi, en notant $\simeq$ la correspondance canonique entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$:

$$\vec{\tau}_j \simeq i\phi_j'(e^{i\theta})\, e^{i\theta}/|\phi_j'(e^{i\theta})| \,. \tag{3.5}$$

Nous poserons alors

$$\vec{b} = a_j(\theta)\, \vec{\tau}_j \quad \text{sur} \quad \Gamma_j\,, \quad j = 1, \ldots, p \tag{3.6}$$

où a_j est une fonction continue réelle 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.2 : *Sous l'hypothèse* (3.6), *le problème* $\mathcal{P}_1$ *a une solution si et seulement si*

$$\forall j = 1, \ldots, p \quad \theta \mapsto a_j(\theta)|\phi_j'(e^{i\theta})| \quad \textit{est analytique}\,. \tag{3.7}$$

Démonstration : *Condition nécessaire* : Étant donné ψ solution de $\mathcal{P}_1$, nous savons d'après le paragraphe 2 que $\psi_j = \psi \circ \phi_j$, définie sur V_ε, satisfait à

$$\vec{b}_j = (\psi_{j\eta}, -\psi_{j\xi}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{3.8}$$

où $\vec{b}_j$ est le « transporté » de $\vec{b}$ sur Γ_0.

Si $\Delta\psi = 0$ sur un voisinage de Γ, sur tout domaine simplement connexe de type (3.4), ψ est la partie réelle d'une fonction holomorphe f. Par composition, il en est de même pour ψ_j avec $f_j = f \circ \phi_j$. En particulier, on a donc de même

$$\Delta\psi_j = 0 \quad \text{sur un voisinage extérieur de} \quad \Gamma_0\,. \tag{3.9}$$

Explicitons maintenant $\vec{b}_j$ en fonction de $a_j(\theta)$ et ϕ_j. En notation complexe, on a d'après les relations de Cauchy qui s'étendent à Γ_0 par continuité :

$$\vec{b}_j \simeq \psi_{j\eta} - i\psi_{j\xi} = -i\bar{f}_j' = -i\bar{f}'(\phi_j)\,\bar{\phi}_j'$$

soit puisque de même $\vec{b} = -i\bar{f}'$ et d'après (3.5), (3.6) :

$$-i\bar{f}_j' = a_j(\theta)\, i\phi_j'(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, \bar{\phi}_j'(e^{i\theta})/|\phi_j'(e^{i\theta})| \tag{3.10}$$

ou encore

$$(3.11) \qquad f_j'(e^{i\theta}) = -e^{-i\theta} a_j(\theta) |\phi_j'(e^{i\theta})| .$$

Ainsi la fonction $z f_j'(z)$ qui est holomorphe sur le domaine $\{z ; 1 < |z| < 1 + \varepsilon, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$ et continue sur la fermeture, est réelle sur l'arc de cercle $\{z ; |z| = 1, \alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2\}$. D'après le principe de symétrie de Schwarz, elle s'étend donc en une fonction holomorphe sur un voisinage de cet arc. En particulier

$$(3.12) \qquad \theta \mapsto -e^{i\theta} f_j'(e^{i\theta}) = a_j(\theta) |\phi_j'(e^{i\theta})|$$

est une fonction analytique de θ pour $\theta \in]\alpha_1, \alpha_2[$ et donc pour tout θ puisque α_1, α_2 sont arbitraires.

Condition suffisante : Posons $g_j(\theta) = a_j(\theta) |\phi_j'(e^{i\theta})|$. Considérons son développement en série de Fourier

$$(3.13) \qquad g_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta} \quad \text{où} \quad a_{-n} = \bar{a}_n .$$

Si g_j est analytique, il existe K, $\gamma > 0$ telles que (voir [4])

$$(3.14) \qquad |a_n| \leqslant K e^{-\gamma |n|} .$$

Posant alors

$$(3.15) \qquad G_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n ,$$

on obtient une fonction holomorphe sur la couronne $e^{-\gamma} < |z| < e^{\gamma}$ telle que $G_j(e^{i\theta}) = g_j(\theta)$.

Selon (3.12), posons maintenant

$$f_j'(z) = -G_j(z)/z = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n-1}$$

ou encore

$$f_j(z) = -a_0 \operatorname{Log} z - \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^n .$$

Alors la fonction $\psi_j = \operatorname{Re} f_j = -a_0 \operatorname{Log} |z| - \operatorname{Re} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^n \right)$ est solution du problème $\mathscr{P}_1$ sur Γ_0 avec la donnée

$$\vec{b}_j \simeq i\, e^{i\theta} g_j(\theta) = -i \bar{f}_j'(e^{i\theta}) = \psi_{j\eta} - i \psi_{j\xi} .$$

On vérifie alors comme au paragraphe II (cf. démonstration de la proposition 2.1) que

$$(3.16) \qquad \psi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \theta_j(x, y)\, \psi_j(\phi_j^{-1}(x, y))$$

est solution de $\mathscr{P}_1$.

Remarque 1 : La fonction f_j admet une extension holomorphe sur toute la couronne V_ε si et seulement si $a_0 = 0$, c'est-à-dire si

$$\int_0^{2\pi} g_j(\theta)\, d\theta = 0 ,$$

ce qui est encore

$$\int_{\Gamma_j} \vec{b} \cdot \vec{\tau}\, d\sigma = 0 .$$

C'est donc la condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit la partie réelle d'une fonction holomorphe globalement définie sur un voisinage de Γ.

Remarque 2 : Le même type de résultat peut être obtenu si le champ de vecteur $\vec{b}$ donné fait un angle constant α non nul avec la tangente à Γ. Ainsi si $\vec{b}$ est remplacé par $e^{i\alpha}\vec{b}$, $\vec{b}_j$ est remplacé par $e^{i\alpha}\vec{b}_j$ et (3.11) devient

$$f_j'(e^{i\theta}) = -\, e^{-i\alpha} e^{-i\theta} a_j(\theta) \left| \phi_j'(e^{i\theta}) \right| .$$

Il suffit alors de raisonner avec la fonction $z \mapsto e^{i\alpha} z f_j'(z)$ pour obtenir la condition nécessaire et suffisante :

- $\int_{\Gamma_j} \vec{b} \cdot \vec{\tau}\, d\sigma = 0 \quad \forall j$
- $\theta \mapsto a_j(\theta) \left| \phi_j(\theta) \right|$ est analytique $\forall j$.

Remarque 3 : Le même raisonnement peut être appliqué au problème consistant à trouver $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tel que

- $\vec{b} = \nabla\psi$ sur Γ
- $\Delta\psi = 0$ sur un voisinage de Γ.

Si $\vec{b} = a(\theta)\, \vec{n}$, la condition nécessaire et suffisante est que $\theta \mapsto a(\theta) \left| \phi_j'(e^{i\theta}) \right|$ soit analytique.

Remarque 4 : *Cas de courbes à points singuliers* : Il est intéressant d'étendre les résultats ci-dessus au cas de courbes à points de rebroussement telles celles étudiées au paragraphe VI. Ainsi, si ϕ_j est une fonction de classe C^1 sur V_ε, holomorphe, univalente sur V_ε, mais s'annulant en un nombre fini de points de Γ_0, on vérifie que les calculs conduisant à la condition nécessaire (3.7) restent valables, en supposant (3.6) en dehors des points litigieux.

Pour la condition suffisante, si ϕ_j' s'annule en un point du cercle, ϕ_j^{-1} peut présenter une singularité en ce point. Ainsi, la fonction ψ solution construite en (3.16) n'est pas nécessairement de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$. Elle est cependant parfaitement définie et régulière sur Ω. De plus, elle est de classe C^1 en tout point « régulier » de la courbe Γ et y satisfait aux conditions au bord requises.

IV. LE PROBLÈME $\mathscr{P}_2$

Nous donnons ici une réponse au problème de formage tel qu'il était posé initialement. Outre les hypothèses de (III) sur les courbes Γ_j, nous supposons ici, de plus, que

(4.1) $$\text{Les courbes } \Gamma_j \text{ sont de classe } C^2.$$

Nous notons C la fonction courbure en chaque point de $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$ et $\tau = 2\,\sigma\mu_0 \geq 0$. Le problème est alors le suivant :

Problème $\mathscr{P}_2$: Existe-t-il une fonction ψ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ telle que, si $\vec{B} = (\psi_y, -\psi_x)$, on ait

(4.2) $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ

(4.3) $\|\vec{B}\|^2 + \tau C = P_j$ constante sur Γ_j pour $j = 1, \ldots, p$

(4.4) $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$ sur $\Omega \cap o$ où o est un voisinage de Γ ?

Remarque : Les constantes P_j sont a priori des inconnues du problème. Il est clair que, si le problème $\mathscr{P}_2$ admet une solution, elles vérifient nécessairement

(4.5) $$P_j \geq \tau \max_{\Gamma_j} C\,.$$

Il se trouve qu'en fait, on peut se fixer arbitrairement P_j satisfaisant à (4.5), l'existence ou non d'une solution dépendant alors seulement des courbes Γ_j. *Nous supposerons donc les constantes P_j données.* La condition (4.5) implique $P_j > 0$ si $\tau > 0$. Nous le supposerons aussi si $\tau = 0$, car le cas $P_j = 0$ est sans intérêt.

THÉORÈME 4.1 : *On suppose* $P_j \geq \tau \max_{\Gamma_j} C$ *et* $P_j > 0$ $\forall j = 1, \dots, p$.

Alors, le problème $\mathcal{P}_2$ *admet une solution si et seulement si*

(i) *Les courbes* Γ_j *sont analytiques*

(ii) *Pour chaque* j *tel que* $P_j = \tau \max_{\Gamma_j} C$, *le nombre de points de* Γ_j *où la courbure atteint son maximum (comptés avec leur multiplicité) est* pair.

De plus, si ψ *et* $\hat{\psi}$ *sont deux solutions, alors* $\psi - \hat{\psi}$ *ou* $\psi + \hat{\psi}$ *est constante au voisinage de* Γ_j, $j = 1, \dots, p$ *(unicité locale).*

Remarque : Dès que Γ_j est une courbe analytique (avec donc $\phi_j'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Gamma_0$) la fonction courbure $\theta \mapsto C(\phi_j(e^{i\theta}))$ est analytique, 2π-périodique. Elle atteint ainsi son maximum en un nombre fini de points sur $[0, 2\pi]$ (sauf dans le cas trivial du cercle). Si θ_0 est un tel point, $C(\phi_j(e^{i\theta})) - C(\phi_j(e^{i\theta_0})) \sim c_p(\theta - \theta_0)^{2p}$, θ voisin de θ_0, avec $c_p < 0$ et p entier strictement positif qui est, par définition la multiplicité du maximum en θ_0.

Le cas (ii) est particulièrement intéressant en pratique. Nous verrons, par exemple, que, dans le cas d'une seule courbe $\Gamma = \Gamma_1$, pour obtenir une distribution de charges j_0 telle que $\int_\Omega j_0 = 0$, il est nécessaire que $P_1 = \tau \max_{\Gamma_1} C$ et donc que la courbe Γ_1 satisfasse à la condition de parité du nombre de maxima.

La démonstration de l'existence est complètement constructive. Des exemples explicites seront traités au paragraphe suivant.

Le cas $\tau = 0$ (absence de tension superficielle) est évidemment un peu particulier. Par exemple, toutes les solutions sont proportionnelles à celle correspondant à $P_1 = 1$.

Si ψ est solution, ψ + constante et $-\psi$ + constante sont solutions avec les mêmes constantes P_j. A ces transformations près, le dernier point du théorème exprime que ψ est *entièrement déterminée* au voisinage de Γ.

Démonstration du théorème 4.1 :

Condition nécessaire : Supposons l'existence de ψ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ telle que $\vec{B} = (\psi_y, -\psi_x)$ satisfait à (4.2), (4.3), (4.4). Alors la norme de $\vec{B}$ et sa direction sont entièrement déterminées. On peut donc écrire

$$\vec{B} = \varepsilon \{P_j - \tau C\}^{1/2} \vec{\tau}_j \quad \text{sur} \quad \Gamma_j$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $\vec{\tau}_j$ est le vecteur unitaire tangent à Γ_j orienté dans le sens des θ croissants (notations du paragraphe III).

Si $P_j > \tau \max\limits_{\Gamma_j} C$, $\vec{B}$ ne s'annule pas sur Γ_j et, par continuité, ε est constant sur Γ_j. Par contre, si $P_j = \tau \max\limits_{\Gamma_j} C$, ε peut changer de signe en les points où C atteint son maximum ($\tau > 0$). Dans tous les cas, d'après le théorème 3.2, il est nécessaire que, pour tout j :

$$(4.6) \qquad \theta \mapsto \varepsilon \left\{P_j - \tau C\left(\phi_j(e^{i\theta})\right)\right\}^{1/2} \left|\phi_j'(e^{i\theta})\right| \quad \text{soit analytique .}$$

Si $\tau = 0$ et $P_j > 0$, ε est nécessairement constant sur Γ_j. La condition (4.6) exprime donc que

$$(4.7) \qquad \theta \mapsto \left|\phi_j'(e^{i\theta})\right| \quad \text{est analytique .}$$

Mais ceci implique que $\theta \mapsto \phi_j(e^{i\theta})$ est analytique, c'est-à-dire que Γ_j est analytique : en effet, puisque ϕ_j est de classe C^1 sur $V_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leqslant |z| < 1 + \varepsilon\}$, holomorphe sur $\mathring{V}_\varepsilon$ avec $\phi_j'(z) \neq 0$, $\forall z \in V_\varepsilon$, la fonction $z \mapsto \operatorname{Log} \phi_j'(z)$ est définie sur des secteurs de la forme $\{z \in \mathbb{C} ; 1 \leqslant |z| < 1 + \varepsilon, \alpha < \operatorname{Arg} z < \beta\}$, holomorphe à l'intérieur, continue sur l'adhérence. Mais, (4.7) implique l'analyticité de :

$$\theta \mapsto \operatorname{Re}\,(\operatorname{Log} \phi_j'(e^{i\theta})) = \operatorname{Log} \left|\phi_j'(e^{i\theta})\right| .$$

A l'aide d'une extension du type (3.13)-(3.15) et du principe de symétrie de Schwarz, on déduit que $\operatorname{Log} \phi_j'(z)$ admet une extension holomorphe au voisinage de $\{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1, \alpha < \operatorname{Arg} z < \beta\}$. L'analyticité de $\theta \to \phi_j'(e^{i\theta})$ et donc de $\theta \mapsto \phi_j(e^{i\theta})$ en résulte.

Examinons maintenant le cas plus difficile $\tau > 0$. Nous allons montrer que (4.6) implique (4.7) et donc, comme ci-dessus, l'analyticité de Γ. Pour cela nous considérons la fonction

$$v(x, y) = \operatorname{Log} \left|\phi_j'(x + iy)\right|$$

définie sur $V_\varepsilon = \{(x, y) ; 1 \leqslant x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon\}$; puisque ϕ_j est holomorphe à l'intérieur de V_ε, la fonction v y est harmonique, soit :

$$(4.8) \qquad \Delta v = 0 \quad \text{sur} \quad \mathring{V}_\varepsilon .$$

D'autre part, l'hypothèse (4.6) peut être interprétée comme une condition au bord sur le cercle-unité de type non linéaire portant sur v. Explicitons-la :

Partant de la relation définissant la courbure en fonction du paramétrage $\theta \mapsto \phi_j(e^{i\theta})$

$$C = \left[1 + \operatorname{Re}\,\left(e^{i\theta} \phi_j''(e^{i\theta})/\phi_j'(e^{i\theta})\right)\right]/\left|\phi_j'(e^{i\theta})\right|$$

et remarquant que la dérivée normale $\frac{\partial v}{\partial r}$ de v satisfait sur le cercle-unité Γ_0 à

$$\frac{\partial v}{\partial r}(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\,\phi_j''(e^{i\theta})/\phi_j'(e^{i\theta}))\,,$$

la condition (4.6) élevée au carré implique

$$\left[P_j - \tau\left(1 + \frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-v}\right] e^{2v} = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{4.9}$$

où g est une fonction analytique de θ, ou encore

$$-\tau\left(1 + \frac{\partial v}{\partial r}\right) = g\, e^{-v} - P_j\, e^{v}\,. \tag{4.10}$$

D'après les résultats de régularité analytique pour les problèmes elliptiques avec conditions de bord analytiques (voir par exemple [6], théorème 6.76′, page 276), on en déduit que v est analytique jusqu'au bord. D'où l'analyticité de $\theta \mapsto \mathrm{Log}\,|\phi_j'(e^{i\theta})|$ et donc de $\theta \mapsto \phi_j(e^{i\theta})$ comme précédemment.

Reste à montrer (ii) dans le cas $P_j = \tau \max C$. Pour cela nous revenons à (4.6). Puisque $\theta \mapsto |\phi_j'(e^{i\theta})|$ est analytique sur $\mathbb{R}$ et différent de 0, il est aussi nécessaire que

$$\theta \mapsto \varepsilon\,\{P_j - \tau C\,(\phi_j(e^{i\theta}))\}^{1/2}$$

soit analytique. Puisque $P_j = \tau \max\limits_{\Gamma_j} C$ et que $\theta \mapsto C\,(\phi_j(e^{i\theta}))$ est analytique, on peut écrire au voisinage de tout $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ en lequel $P_j = \tau C\,(\phi_j(e^{i\theta_0}))$

$$P_j - \tau C\,(\phi_j(e^{i\theta})) = \sum_{n \geq 2p} c_n(\theta - \theta_0)^n \tag{4.11}$$

avec $c_{2p} > 0$ et p entier ≥ 1, multiplicité du maximum. Alors

$$\varepsilon\,\{P_j - \tau C\,(\phi_j(e^{i\theta}))\}^{1/2} = \varepsilon\,|\theta - \theta_0|^p \left\{\sum_{n \geq 2p} c_n(\theta - \theta_0)^{n-2p}\right\}^{1/2}. \tag{4.12}$$

L'analyticité du membre de gauche implique que ε change de signe en $\theta = \theta_0$ si p est impair et que ε reste constant au voisinage de θ_0 si p est pair. Par analyticité, le nombre de tels points θ_0 est fini sur $[0, 2\pi]$. Par périodicité, le nombre de changements de signes de ε doit être pair. On en déduit la parité du nombre de points θ_0 comptés avec leur multiplicité.

Condition suffisante : Construction d'une solution.

Nous utiliserons bien sûr la partie constructive du théorème 3.2. Pour cela, nous considérons le champ de vecteurs continu sur Γ_j défini par

$$\vec{B} = \left\{P_j - \tau C(\phi_j(e^{i\theta}))\right\}^{1/2} \vec{\tau}_j \quad \text{si} \quad P_j > \tau \max_{\Gamma_j} C \tag{4.13}$$

$$\vec{B} = \varepsilon\left\{P_j - \tau C(\phi_j(e^{i\theta}))\right\}^{1/2} \vec{\tau}_j \quad \text{si} \quad P_j = \tau \max_{\Gamma_j} C, \tau > 0\,, \tag{4.14}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et change de signe aux seuls points où la courbure atteint un maximum de multiplicité impaire. La parité du nombre de ces points assure la continuité de $\vec{B}$ sur Γ_j.

Si les courbes Γ_j sont analytiques, ϕ_j peut être supposée holomorphe sur un voisinage du cercle-unité. Ainsi $\vec{B}$ est de la forme $\vec{B} = a_j(\theta)\,\vec{\tau}_j$ où $\theta \mapsto a_j(\theta)\,|\phi_j'(e^{i\theta})|$ est analytique (pour (4.14), l'analyticité se vérifie comme en (4.11)-(4.12)). D'après le théorème 3.2, il est possible de construire ψ satisfaisant à $\vec{B} = (\psi_y, -\psi_x)$ sur Γ_j et $\Delta\psi = 0$ sur un voisinage de Γ. On vérifie que ψ est solution du problème $\mathscr{P}_2$.

Unicité : Si ψ est solution, $\vec{B} = (\psi_y, -\psi_x)$ est nécessairement donné au signe près par les formules (4.13) ou (4.14). D'après le théorème 3.1, ψ (ou $-\psi$) est donc entièrement déterminé à une constante près au voisinage de Γ_j.

Remarque : Si $\Gamma = \Gamma_1$, pour obtenir $\int_\Omega j_0 = 0$, i.e. $\int_\Omega \operatorname{rot} \vec{B} = 0$, par intégration par partie (en supposant par exemple j_0 nul à l'infini), on obtient $\int_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot \vec{\tau}_1 = 0$. Si $\vec{B}$ reste de même sens que $\vec{\tau}_1$ sur Γ_1, ceci est impossible. Nous sommes donc nécessairement dans la situation $P_1 = \tau \max_{\Gamma_1} C$.

V. APPLICATION AU FORMAGE D'UN LIQUIDE CONFINÉ DANS UN DOMAINE BORNÉ SIMPLEMENT CONNEXE

Nous supposerons ici que Γ se réduit à une seule courbe de Jordan, le liquide étant confiné dans l'intérieur de cette courbe. Nous noterons ϕ une application holomorphe univalente du complémentaire U du disque-unité sur Ω qui se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{U}$ sur $\bar{\Omega}$.

Si Γ est analytique (soit $\theta \mapsto \phi(e^{i\theta})$ analytique et $|\phi'(e^{i\theta})| \neq 0\ \forall\theta$), nous savons que le problème de formage a une solution. Lorsque la constante P entrant dans la condition au bord est fixée avec

$$P \geqslant \tau \max_\Gamma C\,, \quad P > 0\,, \tag{5.1}$$

cette solution est entièrement déterminée au voisinage de Γ de la façon suivante :

$$\psi(z) = \operatorname{Re}\,[f(\phi^{-1}(z))] \tag{5.2}$$

où la fonction f holomorphe (éventuellement multivoque) au voisinage du cercle-unité est telle que

$$-zf'(z) = G(z) \tag{5.3}$$

avec G extension holomorphe de la fonction analytique de θ

$$G(e^{i\theta}) = \varepsilon\left\{P - \tau C\,(\phi(e^{i\theta}))\right\}^{1/2}\,|\phi'(e^{i\theta})|\,. \tag{5.4}$$

A propos de l'extension de ψ à Ω tout entier : La fonction ψ est définie sur un voisinage extérieur de Γ dont la taille dépend directement du domaine de définition de l'extension holomorphe à un sous-domaine de U de $G(e^{i\theta})$ défini en (5.4).

Notons $R_0 \in\,]1, \infty]$ le rayon maximal tel que G admette une extension holomorphe sur la couronne $\{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 < |z| < R_0\}$. Alors en ce qui concerne la distribution de courant j_0 cherchée, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

PROPOSITION 5.1 : (1) *Si $R_0 = \infty$, il n'est pas possible de trouver une distribution j_0 formée d'une somme finie de masses de Dirac.*

(2) *Si $R_0 < \infty$, il est nécessaire que le support de j_0 s'approche suffisamment près de la courbe Γ.*

(3) *Dans tous les cas, il est possible de trouver une distribution de courant concentrée sur la courbe $\theta \mapsto \phi(\mathrm{Re}^{i\theta})$ où $1 < R < R_0$.*

Démonstration : Le point (1) résulte de la propriété d'unicité locale. S'il existe une distribution de charges solution nulle au voisinage de Γ, le potentiel $\hat{\psi}$ associé coïncide nécessairement au voisinage de Γ avec la solution ψ qu'on sait construire (au signe près et à une constante près). Supposons alors que $j_0 = \Delta\hat{\psi}$ soit somme finie de masses de Dirac et soit R_1 le plus petit des $R > 1$ tel que la courbe $\theta \mapsto \phi(\mathrm{Re}^{i\theta})$ contienne l'une des masses. Alors, par prolongement analytique ψ et $\hat{\psi}$ coïncident sur tout le domaine

$$\{\phi(\mathrm{Re}^{i\theta})\,;\, 1 < R < R_1,\, \theta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Or ψ se prolonge de façon holomorphe au-delà de ce domaine, alors que $\hat{\psi}$ présente une singularité logarithmique sur le bord puisque $\Delta\hat{\psi}$ y contient une masse de Dirac. Il y a donc contradiction.

Remarque : Plus généralement, si j_0 est une somme de masses de Dirac, elles sont nécessairement hors du domaine $\{\phi(Re^{i\theta}), 1 < R < R_0\}$.

Point (2) : Il résulte aussi de la propriété d'unicité locale : si le support de j_0 est disjoint du domaine $\{\phi(Re^{i\theta}), 1 < R < R_0 + \varepsilon\}$, son potentiel $\hat{\psi}$ coïncide avec ψ sur tout le domaine $\{\phi(Re^{i\theta}), 1 < R < R_0\}$. Mais ψ présente une singularité sur le bord de ce domaine par définition de R_0, ce qui contredit que $\hat{\psi}$ puisse s'étendre en une fonction harmonique sur un domaine plus grand.

Point (3) : Étant donné $R \in]1, R_0[$, nous considérons la fonction $\hat{\psi}$ définie par :

• *sur* $\{z = \phi(re^{i\theta})$ avec $1 \leq r \leq R\}$

$$\hat{\psi}(z) = \psi(z)$$

• sur $\{z = \phi(re^{i\theta})$ avec $R \leq r\}$

$\hat{\psi}$ est solution du problème aux limites sur $\omega = \{\phi(re^{i\theta})\ ;\ R < r\}$

$$\begin{cases} -\Delta\hat{\psi} = 0 & \text{sur} \quad \omega \\ \hat{\psi} = \psi & \text{sur} \quad \partial\omega \\ \hat{\psi} \text{ borné} & \text{sur} \quad \omega\,. \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que $-\Delta\hat{\psi} = j_0$ est une mesure concentrée sur la courbe $\Gamma_R : \theta \mapsto \phi(Re^{i\theta})$ définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle -\Delta\hat{\psi}, \varphi\rangle = \int_{\Gamma_R} \left[\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_i\right] \varphi \, d\sigma\,,$$

où $\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial n}\right)_e$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_i$ sont respectivement les dérivées normales extérieures et intérieures de $\hat{\psi}$.

Remarque : Ce prolongement de ψ peut être en fait réalisé à l'aide de toute courbe fermée régulière incluse dans le domaine $\{\phi(Re^{i\theta}), 1 < R < R_0\}$. On pourra choisir des courbes plus simples, par exemple des cercles si la géométrie de Γ et la taille de R_0 le permettent.

Extension aux courbes à points de rebroussement : Nous nous intéressons ici aux courbes admettant éventuellement des points de rebroussement. Plus précisément nous supposons seulement que ϕ est holomorphe, univalente de U sur Ω et de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$. Ainsi ϕ peut s'annuler en certains points de Γ_0.

Cas $\tau = 0$: Comme nous l'avons remarqué au paragraphe III (*cf.* remarque 4), pour obtenir un potentiel de formage ψ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, il est nécessaire que

$$\theta \mapsto \varepsilon \,|\phi'(e^{i\theta})|$$

soit analytique pour une fonction ε prenant les valeurs ± 1.

Supposons a priori que $\phi'(e^{i\theta}) \neq 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ et que

(5.5) $\quad |\phi'(e^{i\theta})| \sim c_j |\theta - \theta_j|$, $c_j > 0$, au voisinage de θ_j.

Alors, par un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent, on en déduit que nécessairement

(5.6) $\quad \Gamma$ est analytique à l'extérieur des points $\phi\ (e^{i\theta_j})$, $j = 1, \dots, p$

(5.7) $\quad$ le nombre p de points singuliers est pair .

Inversement, si ϕ est telle que $\theta \mapsto \phi(e^{i\theta})$ soit analytique et satisfasse à (5.5) avec p pair, on peut choisir ε pour que $\theta \mapsto \varepsilon\,|\phi'(e^{i\theta})|$ soit analytique sur Γ_0. Les formules (5.2), (5.3), (5.4) fournissent encore une solution du problème de formage : ϕ est un effet un homéomorphisme de $\bar{U}$ sur $\bar{\Omega}$ dont l'inverse est de classe C^1 sur $\bar{\Omega} \setminus \left\{\phi(e^{i\theta_j}), j = 1, \dots, p\right\}$. Ainsi, ψ définie par 5.2 est de classe C^1 sur $\bar{\Omega} \setminus \left\{\phi(e^{i\theta_j})\right\}$ et satisfait aux conditions requises, sauf peut-être aux points singuliers.

Cas $\tau > 0$: Supposons ϕ holomorphe, univalente de U sur Ω et de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$. On suppose aussi que (5.5) est satisfait. Si le problème admet une solution satisfaisant aux conditions au bord pour $\theta \neq \theta_j$, $j = 1, \dots, p$, nécessairement

$$\forall \theta \neq \theta_j,\ j = 1, \dots, p \quad \tau C\ (\phi(e^{i\theta})) \leq P$$

et donc la fonction courbure est nécessairement bornée au voisinage $\theta = \theta_j$. Ceci élimine donc la possibilité de points de rebroussement de types classiques sur Γ.

VI. APPLICATION A UNE FAMILLE DE COURBES : LES TROCHOÏDES

Nous considérons ici les courbes Γ définies par

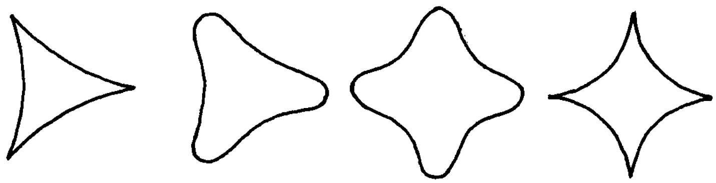
(6.1) $$\theta \mapsto \phi(e^{i\theta}) = a\, e^{i\theta} + b\, e^{-in\theta}$$

où n est un entier supérieur ou égal à 1 et

(6.2) $$a \geq nb > 0\ .$$

Le cas $a = nb$ correspond à des courbes à $(n+1)$ points de rebroussement.

Nous avons, par exemple, les géométries suivantes :



(A) (B) (C) (D)

Figure 2.

Le cas $n = 1$, $a > b$, correspond à une ellipse.

Nous donnons ici sans détails de calcul les applications de notre analyse à chaque situation type. Considérons d'abord le cas général où il n'y a pas de points de rebroussement, i.e. $\underline{a > nb}$: nous avons alors deux cas selon que l'on désire former la courbe de telle façon que

$$P = \tau \max C \tag{6.3}$$

ou

$$P > \tau \max C \,. \tag{6.4}$$

Comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe IV, s'il n'y a pas de courants à l'infini, pour construire une distribution de charges j_0 telle que $\int_\Omega j_0 = 0$, il est nécessaire que $\vec{B}$ présente des points d'arrêt sur Γ et donc qu'on soit dans le cas (6.3). L'autre cas semble plus difficile à réaliser physiquement puisqu'il oblige probablement à fermer les circuits à l'aide du liquide conducteur.

Cas (6.3) :

- si $n = 2p$ (cas de la figure B), pas de solution,
- si $n = 2p - 1$ (cas de la figure C), il existe des solutions ψ au problème qui, au voisinage de Γ, sont construites selon (5.2), (5.3) avec

$$G(z) = \varepsilon \left\{ Ph(z) - \tau k(z)/(h(z))^{1/2} \right\}^{1/2} \tag{6.5}$$

où

$$\begin{aligned} h(z) &= a^2 + n^2 b^2 - anb\,(z^{n+1} + z^{-(n+1)})\,, \\ k(z) &= a^2 - n^3 b^2 + abn(n-1)\,(z^{n+1} + z^{-(n+1)})/2\,, \\ P &= \tau(a + n^2 b)/(a - nb)^2 \end{aligned}$$

et où une détermination convenable est prise pour la racine carrée. Notons que la fonction $\psi(z)$ ainsi obtenue est harmonique sur l'image par ϕ de la couronne $\{z\,;1<|z|<a/nb\}$. On peut alors l'étendre à Ω tout entier suivant l'une des méthodes indiquées au paragraphe précédent.

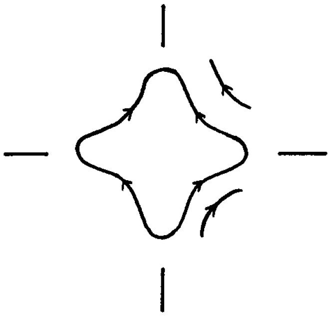


Figure 3.

Cas (6.4) : Les courbes sont alors formables pour tout n, mais sans point d'arrêt pour $\vec{B}$.

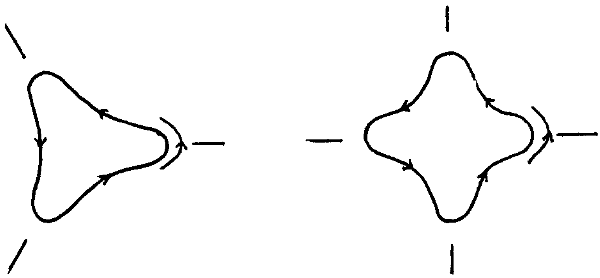


Figure 4.

Dans le cas $a = nb$ et $\tau = 0$, seules les courbes à nombre pair de points de rebroussement sont formables, soit $n = 2p - 1$. La solution est alors donnée par

(6.6)

$$\psi(z) = \mathrm{Re}\ (f(\phi^{-1}(z))),\ \phi(z) = az + bz^{-n},\ f(z) = ai\,(z^p + z^{-p})/p\ .$$

Puisque ϕ est une bijection holomorphe de U sur Ω, la fonction ψ définie par (6.6) est harmonique sur tout l'extérieur de Γ. On voit que pour $|z|$ grand

$$f(z) \sim aiz^p/p \,. \tag{6.7}$$

Pour $p = 2$ (cas de l'astroïde D), on retrouve le cas de « quadrupôle » à l'infini traité dans [8].

Comme annoncé au point (3) de la démonstration de la proposition 5.1, on peut aussi prolonger ψ de telle façon que j_0 soit concentré sur la courbe Γ_R :

$$\theta \mapsto a\, \mathrm{Re}^{i\theta} + bR^{-n} e^{-in\theta} \,.$$

Pour R assez grand, Γ_R est assimilable au cercle de rayon aR et on montre que la densité de j_0 sur cette courbe a un développement de la forme :

$$j_0(\theta) = 2\, R^{p-1} \sin p\theta + 0\,(R^{-p}) \,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERKOWITZ J., FRIEDRICHS V. O., GOERTZEL H., GRAD H., KILLEEN J. et ROBIN E., 1958, *Cusped geometries,* Proc. Second Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, U.N. Geneva, vol. 31, p. 171.

[2] BRANCHER J. P. et SERO-GUILLAUME O., *Sur l'équilibre des liquides magnétiques, Application à la magnétostatique* (J.M.T.A., vol. 2, n° 2, 1983, p. 265-283).

[3] BRANCHER J. P., ETAY J., SERO-GUILLAUME O., *Formage d'une lame* (J.M.T.A., vol. 2, n° 6, 1983, p. 976-989).

[4] DIEUDONNE, *Calcul infinitésimal,* p. 317.

[5] ETAY J., *Le formage électromagnétique des métaux liquides.* Aspects expérimentaux et théoriques (Thèse Docteur-Ingénieur, U.S.M.G., I.N.P.G., 1982).

[6] MORREY C. B., Jr., *Multiple integrals in the Calculus of Variations,* Springer Verlag (1966).

[7] POMMERENKE Chr., *Univalent functions,* Studia Mathematica, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).

[8] SHERCLIFF J. A., *Magnetic shaping of molten metal columns* (Proc. R. Soc. Lond. A 375, p. 455-473, 1981).